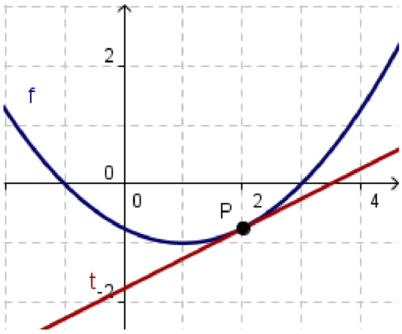
5. Tangentengleichungen

Zielsetzung: Berechnung der Tangentengleichung an einer Stelle x_0.

1. Konkretes Beispiel



An den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ soll an der Stelle $x_0 = 2$ die Gleichung der Tangente t berechnet werden.

In der allgemeinen Geradengleichung $t(x) = m \cdot x + b$ sind

- die Steigung m und
- der y-Achsenabschnitt b zu bestimmen

Dazu sind zwei Gleichungen erforderlich:

- (I) Die Steigung m ist gleich dem Wert der Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$
- (II) Die Tangente verläuft an der Stelle $x_0 = 2$ durch den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ des Graphen.
  Mit $y_0 = f(x_0 = 2)$ erhält man nach Umformung der Geradengleichung:
  $y_0 = m \cdot x_0 + b \Leftrightarrow b = y_0 - m \cdot x_0$

Im Beispiel erhält man

(I) $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ und damit $m = f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(II) $y_0 = f(x_0 = 2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$

Eingesetzt erhält man zunächst $b = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{7}{4}$

Damit ist $t(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

2. Allgemeine Berechnung

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & m = f'(x) \\ \text{(II)} & b = y_0 - mx_0 \end{array}\right\} \Rightarrow t(x) = mx + b$$

3. Mit einer Formel

Rechnet man noch etwas allgemeiner, kann man oben noch b einsetzen:

$$t(x) = mx + b = mx + y_0 - mx_0 = m(x - x_0) + y_0$$

Das entspricht einer um x_0 nach rechts und y_0 nach oben verschobenen Geraden mit der Steigung m.
Ersetzt man noch $m = f'(x_0)$ und $y_0 = f(x_0)$, dann erhält man schließlich:

$$\boxed{t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

(FoSa S. 58 C.2)

Im Beispiel: $t(x) = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2) = \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{3}{4}$