3. Tangentensteigung und Ableitung

Zielsetzung: Berechnung der Tangentensteigung mit Hilfe der Sekantensteigung für $f(x) = x^3$.

Wir müssen den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^3 - x_0{}^3}{h}$$

berechnen.
Dazu formen wir zuerst um:

$$\frac{(x_0+h)^3 - x_0{}^3}{h} = \frac{(x_0+h)^2(x_0+h) - x_0{}^3}{h} = \frac{(x_0{}^2+2hx_0+h^2)(x_0+h) - x_0{}^3}{h} =$$

$$= \frac{(x_0{}^3+3hx_0{}^2+3h^2x_0+h^3) - x_0{}^3}{h} = \frac{3hx_0{}^2+3h^2x_0+h^3}{h} = \frac{h(3x_0{}^2+3hx_0+h^2)}{h} = 3x_0{}^2+3hx_0+h^2$$

Im Grenzwert $h \to 0$ verschwinden die beiden letzten Summenden:

$$m_T(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(3x_0{}^2+3hx_0+h^2\right) = 3x_0{}^2$$

Es ergibt sich also:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow m_T(x_0) = 3x_0{}^2$$

Das bedeutet:

Der Graph von $f(x) = x^3$ besitzt an jeder beliebigen Stelle x_0
eine Tangente, deren Steigung m_T gleich $3x_0{}^2$ ist.

Der Term der Tangentensteigung kann als Funktion aufgefasst werden. (vgl. FoSa S. 57/2.)
Sie wird als **Ableitungsfunktion** oder kurz **Ableitung der Funktion f** bezeichnet.
Das Argument x_0 ersetzt man wie üblich durch x.
Um zum Ausdruck zu bringen, dass die Ableitung der Funktion f vorliegt, schreibt man:

$$\boxed{m_T(x) = f'(x)}$$

Der Wert der Ableitungsfunktion $f'(x_0)$
ist gleich dem
Wert der Tangentensteigung m_T an der Stelle x_0.